

PERBANDINGAN MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE-4 BERDASARKAN VARIASI RATA-RATA

M. Imran

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau,

Diterima: 25-9-2001

Disetujui: 12-2-2002

ABSTRACT

A comparison of modified the fourth order classical Runge-Kutta method based on the harmonic mean and geometry mean to solve an initial value problem $y'=f(x,y), \dots, y(x_0)=y_0$ was carried out by looking into their local truncated errors, stabilities and efficiencies. A comparison was also performed by doing computations for f depended on x and y , and for f depended on y only.

Keywords: *Runge-Kutta method, arithmetic mean, harmonic mean, geometry mean*

PENDAHULUAN

Dalam matematika terapan seseorang sering dihadapkan ke soal-an persamaan diferensial dengan syarat awal tertentu seperti berikut ini:

$$y'=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0 \quad (1)$$

dengan $f(x,y)$ fungsi yang kontinu pada setiap titik (x,y) pada daerah D di bidang xy dan (x_0, y_0) adalah suatu titik pada D .

Akan tetapi karena kendala yang ada di fungsi f , penyelesaian persamaan (1) secara analitik tidak

selalu dapat dilakukan. Untuk itu dikembangkanlah metode pendekatan yang berprinsip beda terbagi (divided difference).

Metode pendekatan yang cukup sederhana dan banyak digunakan di software komersial seperti Maple dan MATLAB untuk menyelesaikan masalah nilai awal (1) adalah metode Runge-Kutta (RK) orde-4 klasik yang diberikan oleh (3), (4), dengan koefisien di (5).

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(y_n) \\ k_2 &= f(y_n + ha_1 k_1) \\ k_3 &= f(y_n + ha_2 k_1 + ha_3 k_2) \\ k_4 &= f(y_n + ha_4 k_1 + ha_5 k_2 + ha_6 k_3) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4)$$

dengan $a_1=1/2, a_2=0, a_3=1/2, a_4=0, a_5=0, a_6=1$. (5)

Persamaan (4) dapat diekspresikan dengan

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3} \left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2} \right). \quad (6)$$

Evans (1991) mengganti rata rata aritmatik di persamaan (6) dengan rata-rata geometri, dan dia

berhasil menemukan metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri yang diberikan oleh

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{16}(-k_1 + 9k_2)\right) \\ k_4 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{24}(-3k_1 + 5k_2 + 22k_3)\right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{3} \left(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4} \right), \quad (8)$$

dengan galat pemotongan lokalnya

$$GG = -\frac{1}{184320} f(64f^3 f_{yyyy} + 208f_y f_{yyy} f^2 - 864(f_{yy})^2 f^2 + 1974f_{yy} (f_y)^2 f - 3561(f_y)^4) h. \quad (9)$$

Selanjutnya dengan mengganti rata rata aritmatik di persamaan (6) dengan rata-rata harmonik Sanugi dan Evans (1994) berhasil mene-

emukan metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik yang diberikan oleh:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{8}(-k_1 + 5k_2)\right) \\ k_4 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{8}(-5k_1 + 7k_2 + 18k_3)\right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2h}{3} \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} \right) \quad (11)$$

dengan galat pemotongan lokalnya

$$\begin{aligned} GH = & -\frac{1}{2880} f(8f^3 f_{yyyy} + 36f_y f_{yyy} f^2 \\ & - 168(f_{yy})^2 f^2 + 183f_{yy} (f_y)^2 f - 732(f_y)^4) h. \end{aligned} \quad (12)$$

Pada penelitian ini dikaji perbandingan kedua metode hasil modifikasi diatas dengan melihat kualitas dan keampuhan komputasinya. Sebagai acuan perbandingan digunakan metode RK orde-4 klasik.

METODE

Untuk melihat baik tidaknya suatu metode pendekatan yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal (1) perlu dilihat kualitas metode tersebut dan keampuhan komputasinya. Shampine (1976) menyatakan ada empat hal yang harus ditinjau dalam menguji kualitas suatu metode untuk mendapatkan penyelesaian (1), yaitu keakuratan (galat), kualitas taksiran galat, kestabilan

dan keefisienan. Penerapan test kualitas diatas dilakukan Shampine untuk metode-metode yang ordenya berbeda dan dengan panjang langkah bervariasi. Karena objek penelitian disini adalah metode berlangkah tunggal maka pengujian kualitas taksiran galat tidak relevan dilakukan.

Pengujian komputasi dilakukan dengan melihat kelakuan selesaian numerik untuk empat soal dengan mengambil panjang langkah $h = 0.1$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Keakuratan

Ukuran yang sangat penting untuk menentukan kualitas suatu metode adalah keakuratan (galat) yang diperoleh metode tersebut.

Walaupun algoritma yang digunakan pemakai cenderung memperhatikan galat global, pada penelitian ini difokuskan perhatian ke galat pemotongan lokal metode yang diterapkan. Hal ini memungkinkan untuk membuat kesimpulan terlepas dari ketergantungan kepada mesin yang digunakan.

Bila fungsi f linear terhadap y , maka $f_{yy} = f_{yyy} = f_{yyyy} = 0$. Jadi dari persamaan (9) diperoleh galat pemotongan lokal metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri

$$|GG_{linear}| = \frac{1187}{61440} Ch^5 f, \quad (13)$$

dan dari persamaan (12) didapat galat pemotongan lokal metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik

$$|GH_{linear}| = \frac{61}{240} Ch^5 f, \quad (14)$$

Selanjutnya untuk melihat batas galat minimum dari kedua metode yang dibahas diikuti cara yang diberikan Lotkin, lihat Gear (1971), yang berdasarkan kepada batasan nilai turunan parsial fungsi f yang dinyatakan oleh

$$\left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} \right| \leq \frac{L^{i+j}}{M^{j-1}} \quad \text{dan} \quad |f(x,y)|$$

$$\leq M,$$

dengan $i + j \leq p$ (orde dari metode), dan L dan M adalah konstanta. Dari sini dan memperhatikan persamaan (9) didapat batas

galat pemotongan lokal metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri untuk fungsi f linear terhadap y

$$|BGG_{linear}| \leq \frac{2179}{184320} ML^4 h^5, \quad (15)$$

Dengan cara yang sama dan mempertimbangkan persamaan (12) didapat batas galat pemotongan lokal metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik untuk fungsi f linear terhadap y

$$|BGH_{linear}| \leq \frac{7}{30} ML^4 h^5, \quad (16)$$

Dari persamaan (13) dan persamaan (14) terlihat bahwa harga mutlak galat pemotongan lokal metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri lebih kecil dari galat pemotongan lokal metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik. Demikian juga batas galat yang dihasilkan kedua metode ini, seperti pada persamaan (15) dan (16). Jadi secara teoritis kalau yang diperhatikan hanya galat pemotongan lokal kedua metode saja, maka dapat disimpulkan bahwa metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri lebih efisien dari metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik.

Kestabilan

Untuk menganalisa kestabilan metode RK orde-4 digunakan soalan

$$y' = \lambda y, \quad (17)$$

Bila nilai y_n diketahui, solusi eksaks y_{n+1} secara analitik diberikan oleh

$$y_{n+1} = \exp(\lambda h) y_n. \quad (18)$$

Kestabilan suatu metode tergantung kepada akar karakteristik hasil penerapan suatu metode ke soalan (17), sedangkan akar karakteristik itu sendiri tergantung kepada λh . Jadi perlu ditentukan nilai λh sedemikian hingga metode yang diterapkan

stabil. Yang menjadi perhatian disini hanyalah $\lambda < 0$ dan real, yaitu penyelesaian $\{y_n\}$ dari soalan bila diterapkan ke model persamaan (17) menuju nol bila $x_n \rightarrow \infty$, untuk sebarang y_0, y_1, \dots, y_p .

Dengan mengikuti teknik yang diberikan Gear (1971), diperoleh polinomial dalam λh yang berhubungan dengan metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri sebagai diberikan persamaan(19).

$$\begin{aligned}
 P_G(\lambda h) = & 1 + \frac{1}{6} \lambda h \sqrt{2} \sqrt{2 + \lambda h} \\
 & + \frac{1}{24} \lambda h (9\lambda^3 h^3 + 34\lambda^2 h^2 + 64\lambda h + 64)^{1/2} \\
 & + \frac{1}{192} \lambda h (297\lambda^5 h^5 + 1176\lambda^4 h^4 + 3360\lambda^3 h^3 \\
 & + 9\lambda^3 h^3 + 34\lambda^2 h^2 + 64\lambda h + 64)^{1/2} \quad (19)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya digambarkan persamaan (19) dan $\exp(\lambda h)$ pada satu bidang. Hasilnya terlihat di Gambar 1.(a) Dari gambar ini terlihat bahwa grafik fungsi $P_G(\lambda h)$ terputus bila $\lambda h \leq -1.3947$. Hal ini dikarenakan $P_G(\lambda h)$ sudah terletak dibidang kompleks. Dengan

demikian jelas bahwa h harus dipilih sedemikian hingga $\lambda h > -1.3947$ dipenuhi.

Dengan teknik yang sama didapat polinomial dalam λh untuk metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri, seperti di persamaan(20).

$$\begin{aligned}
P_H(\lambda h) = & \frac{1}{48} (3145728 + 7864320 \lambda h + 10223616 \lambda^2 h^2 \\
& + 8888320 \lambda^3 h^3 + 5658880 \lambda^4 h^4 + 2659840 \lambda^5 h^5 \\
& + 5658880 \lambda^6 h^6 + 2659840 \lambda^7 h^7 \\
& + 35532 \lambda^8 h^8 + 2673 \lambda^9 h^9) / \\
& ((4 + \lambda h)(64 + 32 \lambda h + 9 \lambda^2 h^2) \\
& (256 + 192 \lambda h + 108 \lambda^2 h^2 + 33 \lambda^3 h^3)), \tag{20}
\end{aligned}$$

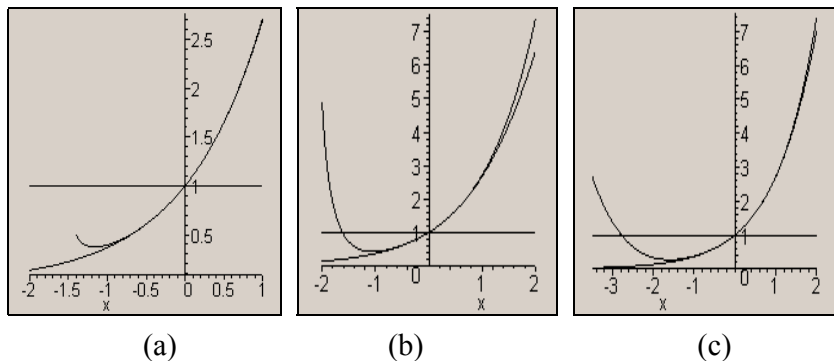
dan metode Runge-Kutta klasik orde-4 diberikan oleh (21).

$$P_K(\lambda h) = 1 + \lambda h + 108 \frac{1}{2} \lambda^2 h^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 h^3 + \frac{1}{24} \lambda^4 h^4. \tag{21}$$

Gambar fungsi $P_H(\lambda h)$ dengan $\exp(\lambda h)$ dan $P_K(\lambda h)$ dengan $\exp(\lambda h)$ diberikan secara berturut-turut oleh Gambar 1.(b) dan Gambar 1.(c). Dari Gambar 1.(b) kelihatan bahwa nilai h harus memenuhi $\lambda h > -1.6178$. Gambar

1.(c) memberikan informasi bahwa bila $\lambda < 0$ dan nilai mutlak λh bertambah besar, maka deviasi $P_K(\lambda h)$ dari $\exp(\lambda h)$ bertambah besar. Khususnya bila $\lambda h \leq -2.785$ metode menjadi tidak stabil.

Gambar 1. Daerah kestabilan mutlak metode Runge-Kutta orde-4 (a) berdasarkan rata-rata geometri, (b) berdasarkan rata-rata harmonik, (c) klasik



Dari analisa ini terlihat bahwa daerah kestabilan mutlak metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik lebih kecil dari metode

RK orde-4 klasik tetapi lebih besar dari metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri.

Keefesianan

Keefisienan suatu metode dapat dilihat pada empat sisi yaitu banyak langkah yang dipunyai metode, total evaluasi yang diperlukan untuk menyelesaikan suatu soalan, overhead pada

komputasi algoritma dan jumlah storage, Shampine dan Watt (1976). Dari ke empat sisi ini, yang ketiga tidak diperhatikan dalam penelitian ini karena sangat tergantung ke cara pengimplementasian suatu algoritma pada bahasa pemrograman

Tabel 1. Karakteristik metode Runge-Kutta orde-4.

Metode RK orde-4	(+,-)	(x,/)	\sqrt{a}	Evaluasi fungsi	Storage
Rata-rata Geometri	13	15	3	4	1
Rata-rata Harmonik	11	24	0	4	1
Klasik	9	10	0	4	1

Dari Tabel 1 terlihat bahwa metode yang dibandingkan mempunyai orde, evaluasi fungsi dan storage yang sama. Jadi harus dilihat sisi lain untuk menentukan metode yang paling efisien. Operasi penjumlahan dan pengurangan juga tak dapat digunakan sebagai tolok ukur keefisienan, karena operasi ini tidak menghasilkan galat pembulatan, lihat Wilkinson (1969).

Untuk menentukan cost perkalian diproses perkalian dua bilangan yang dinyatakan dalam t digit, yang terletak pada interval $[-1,1]$. Perkalian dua bilangan ini secara umum menghasilkan $2t$ digit. Jadi dalam operasinya hilang t digit. Berdasarkan ini dapat ditarik disimpulkan bahwa metode yang melibatkan lebih banyak operasi

perkalian/pembagian kurang efisien.

Selanjutnya untuk menentukan cost penarikan akar kuadrat dilihat proses penarikan akar di kalkulator atau komputer. Di kalkulator ada fungsi yang dapat digunakan untuk menarik akar, seperti penentuan nilai \sqrt{a} . Akan tetapi penentuan akar tersebut pada hakekatnya penyelesaian persamaan $x^2-a = 0$, dengan menggunakan metode Newton. Dengan demikian biaya penarikan akar jauh lebih besar dari perkalian/pembagian.

Berdasarkan ini dan memperhatikan Tabel 1 dapat disimpulkan bahwa metode hasil modifikasi RK orde 4 klasik kurang efisien dibanding metode RK orde 4 klasik itu sendiri. Sedangkan dari kedua metode hasil modifikasi metode RK

berdasarkan rata-rata harmonik lebih efisien.

Komputasi

Untuk melakukan perbandingan komputasi, digunakan empat jenis soalan berikut:

Soal 1. $y' = y$, $y(0) = 1$, dengan selesaian eksaks $y = \exp(x)$ pada interval $[0, 1]$.

Soal 2. $y' = -y$, $y(0) = 1$, dengan selesaian eksaks $y = \exp(-x)$ pada interval $[0, 1]$.

Soal 3. $y' = -(1-y^2)^{1/2}$, $y(0.1) = \cos(0.1)$, dengan selesaian eksaks $y = \cos(x)$ pada interval $[0.1, 1]$.

Soal 4. $y' = -32xy^2$, $y(-0.5) = 0.2$, dengan selesaian eksaks $y = 1/(16x^2+1)$ pada interval $[-0.5, 0]$.

Hasil eksaks dan galat yang terjadi disetiap dua langkah iterasi ditunjukkan untuk soalan yang bersesuaian di Tabel 2, 3, 4, dan 5. Dari perbandingan terlihat bahwa metode RK orde-4 klasik tetap

unggul yang di ikuti oleh metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik. Dari komputasi juga terlihat bahwa untuk kasus tertentu metode RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri cukup baik, walaupun penerapannya memerlukan perhatian khusus, yaitu metode ini tak dapat diterapkan bila k_i berbeda tanda dengan k_{i+1} , dengan $i=1,2,3$. Disamping itu tanda hasil penarikan akar harus diperhatikan, yaitu bila fungsi f monoton naik tanda penarikan akar yang digunakan adalah positif sebaliknya jika f monoton turun tanda penarikan akarnya dipilih negatif. Kesulitan dalam penerapan metode ini jika fungsi f berubah-ubah arah yang berakibat hilangnya keakuratan metode.

Tabel 2. Galat Hasil Perhitungan Soal 1.

x	Eksaks	Galat Geometri	Galat Harmonik	Galat Klasik
0.2	0.818731	3.545305e-007	5.874603e-007	1.483283e-007
0.4	0.670320	5.805302e-007	9.619440e-007	2.428819e-007
0.6	0.548812	7.129471e-007	1.181360e-006	2.982823e-007
0.8	0.449329	7.782824e-007	1.289622e-006	3.256172e-007
1.0	0.367880	7.965049e-007	1.319817e-006	3.332411e-007

Tabel 3. Galat Hasil Perhitungan Soal 2.

x	Eksaks	Galat Geometri	Galat Harmonik	Galat Klasik
0.2	1.221403	4.218150e-007	6.880061e-007	1.873095e-007
0.4	1.491824	1.030412 e-006	1.680665e-006	4.575606e-007
0.6	1.822118	1.887821e-006	3.079152e-006	8.382986e-007
0.8	2.225540	3.074386e-006	5.014511e-006	1.365200e-006
1.0	2.718280	4.693829e-006	7.655920e-006	2.084324e-006

Tabel 4. Galat Hasil Perhitungan Soal 3.

X	Eksaks	Galat Geometri	Galat Harmonik	Galat Klasik
0.2	0.980128	8.097342e-005	1.014005e-004	6.140652e-005
0.4	0.921205	1.905152e-004	2.392501e-004	1.439331e-004
0.6	0.825548	2.815691e-004	3.536521e-004	2.126688e-004
0.8	0.696978	3.592997e-004	4.512704e-004	2.713819e-004
1.0	0.540621	4.220751e-004	5.301087e-004	3.187970e-004

Tabel 5. Galat Hasil Perhitungan Soal 4.

X	Eksaks	Galat Geometri	Galat Harmonik	Galat Klasik
-0.4	0.280894	3.899271e-005	8.357160e-005	4.624927e-006
-0.3	0.409815	1.665571e-004	3.594143e-004	2,152616e-005
-0.2	0.609685	5.353131e-004	1.160194e-003	7.114767e-005
-0.1	0.861908	1.115866e-003	2.436686e-003	1.612625e-004
0.0	0.999789	6.448031e-003	6.183397e-003	2.105124e-004

KESIMPULAN

Dari perbandingan terlihat bahwa metode RK orde-4 klasik tetap unggul yang diikuti oleh RK orde-4 berdasarkan rata-rata harmonik. Dari komputasi terlihat bahwa untuk kasus tertentu RK orde-4 berdasarkan rata-rata geometri cukup baik, walaupun penerapannya memerlukan perhatian khusus, yaitu perlunya

perhatian khusus pada tanda k_i dan k_{i+1} dengan $i=1,2,3$, dan tanda penarikan akar yang tergantung dari kelakuan fungsi f

Komputasi juga memberi isyarat bahwa metode hasil modifikasi hanya kompetitif untuk fungsi f yang mengandung variabel y saja, sedangkan untuk fungsi f yang terdiri dari variabel x dan y keakuratannya menurun.

SARAN

Sebagaimana diketahui bahwa untuk kelakuan fungsi pada interval tertentu yang cenderung rata, panjang langkah integrasi dapat diperbesar. Dari pengamatan ini perbandingan yang telah dilakukan dapat dilanjutkan untuk panjang langkah yang bervariasi dengan menerapkan strategi Romberg, lihat Nakamura (1993) atau menggunakan panjang langkah otomatis sebagaimana metode Runge-Kutta Fehlberg orde-4(5) yang ditemukan Fehlberg (1969) dan diimplementasikan oleh Shampine (1976).

DAFTAR PUSTAKA

- Evans D. J., 1991, New 4th Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problem with Error Control, Intern. J. Computer Math., Vol. 39, halaman 217-227.
- Fehlberg E., 1969, Low Order Classical Runge-Kutta Formula with Step Size Control and Their Applications to Some Head Transfer Problems, Rept. NASA, TR R-315, George C. Marshall Space, Flight Center, Marshall, Alabama.
- Gear, C. W., 1971, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Nakamura, S., 1993, Applied Numerical Method Using C, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Sanugi B. B. dan D. J. Evans, 1994, A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean, Intern. J. Computer Math., Vol. 50, halaman 113-118.
- Shampine L. F. dan H. A. Watts, 1976, Practical Solution of Ordinary Differential Equations by Runge-Kutta Methods, Rept. SAND76-0585, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico.
- Wilkinson, J. H., 1969, Rounding Error in Algebraic Processes, Dover Publication Inc., New York.